

# Introducción al Álgebra - Control 5 (12-1)

## Punto Problema 1

a) i) Por demostrar que  $(G', \cdot)$  es subgrupo de  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

Usando la propiedad compacta:  $1 \in G'$  pues para  $a=b=0 \in \mathbb{Z}$

(0.5)  $2^0 3^0 = 1$ , entonces  $G' \neq \emptyset$

Por demostrar que  $\forall g_1, g_2 \in G', g_1 \cdot g_2^{-1} \in G'$

En efecto, sea  $g_1 = 2^a 3^b, a, b \in \mathbb{Z}$  y  $g_2 = 2^c 3^d, c, d \in \mathbb{Z}$

Así,  $g_1 \cdot g_2^{-1} = (2^a 3^b) \cdot (2^{-c} 3^{-d}) = 2^{a-c} 3^{b-d}$  con  $(a-c), (b-d) \in \mathbb{Z}$ .

(1.5) Sigue que  $g_1 \cdot g_2^{-1} \in G'$  y por lo tanto  $(G', \cdot)$  es subgrupo de  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ .

ii) Demostrar que el grupo  $(G, +)$  es isomorfo a  $(G', \cdot)$

En efecto, sea  $\varphi: G \rightarrow G'$

(0.5)  $(m, n) \rightarrow \varphi((m, n)) = 2^m 3^n$

$\varphi$  es inyectiva pues:  $\varphi((m, n)) = \varphi((p, q)) \Rightarrow 2^m 3^n = 2^p 3^q \Leftrightarrow \underbrace{2^{m-p}}_{\text{par}} = \underbrace{3^{q-n}}_{\text{impar}}$

la última igualdad solo es posible si  $m-p = q-n = 0$

(0.5)  $\Rightarrow$  si  $m=p \wedge n=q \Rightarrow (m, n) = (p, q)$

(0.3)  $\varphi$  es sobreyectivo pues:  $\forall 2^a 3^b \in G'$  basta tomar  $(a, b) \in G$  y  $\varphi(a, b) = 2^a 3^b$

Monomorfismo: Sean  $(m, n), (p, q) \in G$

$\varphi((m, n) + (p, q)) = \varphi((m+p, n+q)) = 2^{m+p} 3^{n+q} = 2^m \cdot 2^p \cdot 3^n \cdot 3^q = \underbrace{(2^m 3^n)}_{\varphi((m, n))} \cdot \underbrace{(2^p 3^q)}_{\varphi((p, q))}$

(0.7) Así,  $\varphi((m, n) + (p, q)) = \varphi((m, n)) \cdot \varphi((p, q))$

b)  $z \in \mathbb{C}, z \neq -1, |z| = 1$

(2.0) En efecto  $\frac{1+z}{1+\bar{z}} = \frac{1+z}{1+\bar{z}} \cdot \frac{z}{z} = \frac{(1+z)z}{z+z\bar{z}} = \frac{(1+z)z}{z+|z|^2} = \frac{(1+z)z}{z+1} = z$

## Punto Problema 2

$(A, +, \cdot)$  es anillo conmutativo con unidad.

i) Demostrar que  $(G, \cdot)$  es grupo abeliano  $G = \{a \in A \mid a \text{ tiene inverso por } \cdot\}$

$\vdash G$  es cerrado, o bien  $\cdot$  es l.f.i. en  $G$

Sean  $a_1, a_2 \in G$ , por dem. q'  $a_1 \cdot a_2 \in G$

En efecto,  $a_1 \in G \Rightarrow \exists a_1^{-1} \in G$  y  $a_2 \in G \Rightarrow \exists a_2^{-1} \in G$  tales que  $a_1 \cdot a_1^{-1} = 1 \wedge a_2 \cdot a_2^{-1} = 1$

Así,  $(a_1 \cdot a_2) \cdot (a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_2^{-1}) \cdot a_1^{-1} = a_1 \cdot 1 \cdot a_1^{-1} = a_1 \cdot a_1^{-1} = 1$ , es decir

(1.0)  $(a_1 \cdot a_2)$  tiene inverso por  $\cdot \Rightarrow (a_1 \cdot a_2) \in G$

(0.5)  $\vdash \cdot$  es asociativo y conmutativo en  $A$  y por lo tanto en  $G \subseteq A$

(0.5)  $\vdash 1 \in A$  es invertible ( $1 \cdot 1 = 1$ ), entonces  $1 =$  neutro en  $G$ .

$\vdash \forall a \in G$  es invertible por  $\cdot$  por definición de  $G$ .

(0.5) Sigue que  $(G, \cdot)$  es grupo Abeliano.

ii)  $H = \{a^2 \mid a \in G\}$ . Probar que  $H$  es subgrupo de  $G$

(0.5)  $G \neq \emptyset$  pues el menos  $1 \in G$  ( $1$  es autoinvertible por  $\cdot$ ), entonces  $1^2 = 1 \in H$

Según la propiedad compacta  $\forall a_1, a_2 \in H$  p.d.m. q'  $a_1^2 (a_2^2)^{-1} \in H$ .

En efecto, sean  $a_1, a_2 \in G$  y por lo tanto  $a_1^2, a_2^2 \in H$

Pero  $a_1, a_2 \in G \Rightarrow a_1, a_2^{-1} \in G \Rightarrow a_1 \cdot a_2^{-1} \in G \Rightarrow (a_1 \cdot a_2^{-1})^2 \in H$ .

(1.5)  $\Rightarrow a_1^2 \cdot (a_2^{-1})^2 \in H \Rightarrow a_1^2 \cdot (a_2^2)^{-1} \in H$  q.e.d.

iii) Si  $A = \mathbb{Z}_8$ , encuentre  $G$  y  $H$ . // Lo más práctico es desarrollar la tabla por  $\cdot$  en  $\mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}$ .

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	0	2	4	6
3	3	6	1	4	7	3	5
4	4	0	4	0	4	0	4
5	5	2	7	4	1	6	3
6	6	4	2	0	6	4	2
7	7	6	5	4	3	2	1

De la tabla se deduce que los invertibles por  $\cdot$  son los que tienen la unidad en sus filas y columnas

Así,  $G = \{1, 3, 5, 7\} \rightarrow$  (1.0)

y  $H = \{1^2, 3^2, 5^2, 7^2\} = \{1, 9, 25, 49\} = \{1, 1, 1, 1\} = \{1\}$  en  $\mathbb{Z}_8$  (1.5)